Chapitre 1

Espaces vectoriels

et

sous-espaces vectoriels

Présentation

Ce PDF est le premier support de cours de l'ECUE EV du S2 : espaces vectoriels. Il porte sur les notions d'espaces et de sous-espaces vectoriels.

Il sert de substitution et/ou de complément des MiMos concernant ce même sujet. Il y a tout ce qui vous servira pour faire les TD.

Les définitions sont en violet, les théorèmes et propositions en rouges et les exemples à connaitre en bleu. La dernière partie de ce support comporte les démonstrations à connaitre sur ce thème.

Vous trouverez aussi des commentaires (remarques, warning) qu'il ne faut pas négliger.

Il y a par ailleurs quelques exemples supplémentaires et exercices fondamentaux.

Table des matières

1 Généralités et espaces vectoriels de référence 3
1.1 Définitions, exemples, propriétés 3
1.2 Espaces vectoriels de référence 5
2 Les sous-espaces vectoriels 7
2.1 Définition et caractérisation 7
2.2 Somme de sous-espaces vectoriels 9
3 Les démonstrations à connaitre 13
3.1 Intersection de sous-espaces vectoriels 13
3.2 Somme de sous-espaces vectoriels 13

1 Généralités et espaces vectoriels de référence

1.1 Définitions, exemples, propriétés

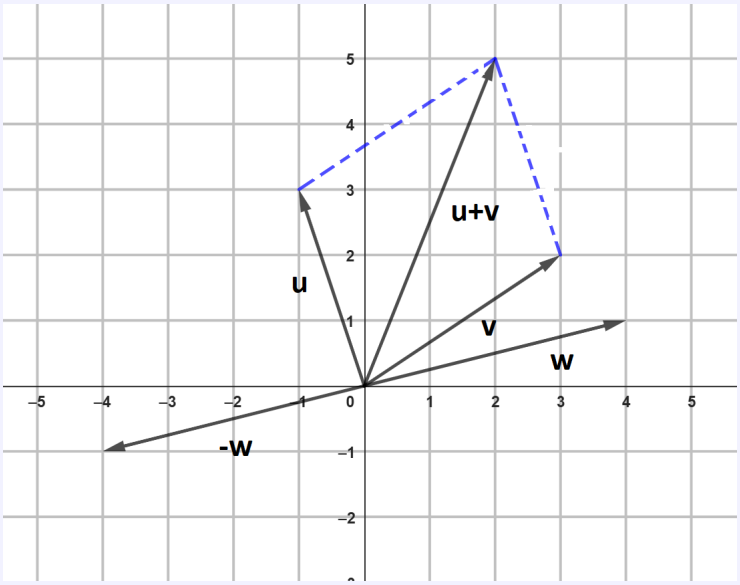
Figurez-vous que vous travaillez dans des espaces vectoriels depuis le lycée, sans le savoir.

En effet, voici quelques exemples (que nous détaillerons par la suite) que vous avez croisés :

Exemples vus au lycée

- Le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels.

  Vous avez tous entendu parler de vecteurs du plan et de l'espace. À « l'époque », vous mettiez des flèches sur des u, v,w... Les dessins suivants doivent vous rappeler de (bons) souvenirs 😉



  Sur ce dessin, on a $\vec{u} = (-1, 3)$, $\vec{v} = (3, 2)$ et $\vec{w} = (4, 1)$. On peut construire, par exemple, à partir de ces trois vecteurs un vecteur somme $\overrightarrow{u+v} = (2, 5)$ ou bien le vecteur $-\vec{w} = (-4, 1)$ obtenu en multipliant $\vec{w}$ par -1.

- L'ensemble des fonctions réelles est aussi un espace vectoriel. On va pouvoir additionner deux fonctions entre elles et multiplier une fonction par un réel.

  Par exemple, si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$, on peut définir la fonction $f + g$ par $f + g : x \longmapsto x^2 + \cos(x)$ ou la fonction $2.f$ par $2.f : x \longmapsto 2x^2$.

- Dans le même esprit, l'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel...
- Et enfin, $\mathbb{C}$ (et oui...) est un espace vectoriel...

Voilà donc ce que vous devez retenir avant tout : un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un ensemble muni d'une addition interne entre ses éléments et d'une multiplication externe entre un réel et un de ses éléments.

L'objectif du cours sur les espaces vectoriels est justement de faire ressortir les règles et propriétés communes à tous ces ensembles, qui sont pourtant bien différents mais tous munis d'une addition interne et d'une multiplication externe.

La définition suivante statue sur les points communs à ces ensembles. Ne prenez pas peur, elle est assez longue!!!

Mais, les opérations mises en jeu vérifient des propriétés qui devraient vous paraitre naturelles.

Définition

Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) si

1. E est muni d'une opération **interne** $+$ (interne signifie : $\forall\,(u,v) \in E^2,\ u+v \in E$) vérifiant les propriétés classiques d'une addition, à savoir :
   - $\forall\,(u,v) \in E^2,\ u+v = v+u$ (commutativité)
   - $\forall\,(u,v,w) \in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (associativité)
   - Il existe un vecteur de E, noté 0_E, tel que $\forall\, u \in E,\ u+0_E = u$ (existence d'un élément neutre)
   - $\forall\, u \in E$, il existe un vecteur de E, noté $-u \in E$, tel que $u+(-u) = 0_E$ (tout élément de E a un opposé)
2. E est muni d'une multiplication **externe** $\cdot$ (externe signifie : $\forall\,(\alpha,u) \in \mathbb{R}\times E,\ \alpha\cdot u \in E$) vérifiant les propriétés suivantes essentiellement de distributivité :

$$\forall\,(u,v) \in E^2 \text{ et } \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v \\ \text{(ii)} & (\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot u \\ \text{(iii)} & \alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\beta)\cdot u \\ \text{(iv)} & 1.u = u \end{array}$$

Vocabulaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Les éléments de E sont appelés vecteurs.
2. 0_E est appelé vecteur nul.
3. La lettre $\mathbb{R}$ dans le nom « $\mathbb{R}$-espace vectoriel » indique que la multiplication externe se fait entre un réel (élément de $\mathbb{R}$) et un élément de E (vecteur).



Contrairement au lycée, nous ne mettrons plus de flèche sur les vecteurs, sauf éventuellement dans les dessins dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, par exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, un vecteur est $u = (x,y)$ comme vous avez appris mais sans la flèche. Dans l'ensemble des fonctions, un vecteur est f une fonction.

Enfin, il faudra faire une distinction entre le vecteur nul de E, 0_E et le réel 0 qu'on pourrait noter $0_{\mathbb{R}}$.



Il n'y a pas de multiplication interne (entre deux vecteurs) dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !!

Exemples ou contre-exemples

- À vous de vous convaincre que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- $\mathbb{N}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car la multiplication externe n'est pas stable dans $\mathbb{N}$ (la multiplication d'un réel avec un entier naturel ne donne pas toujours un entier naturel).
- L'ensemble des fonctions croissantes n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car si on multiplie une fonction croissante par un réel négatif, elle n'est plus croissante mais décroissante.

Quelques propriétés découlent de la définition mais sont très naturelles. On ne va pas vous assommer avec. En revanche, il y en a une qu'il faut retenir absolument :

Propriétés

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\forall\,(\alpha,u)\in\mathbb{R}\times E,\ \alpha.u=0_E \iff \alpha=0 \text{ ou } u=0_E$$

1.2 Espaces vectoriels de référence

Voilà les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, dits de référence, que vous devez connaitre. Pour chacun d'entre eux, les deux opérations mises en jeu sont précisées ainsi que le vecteur nul.

Exemple 1

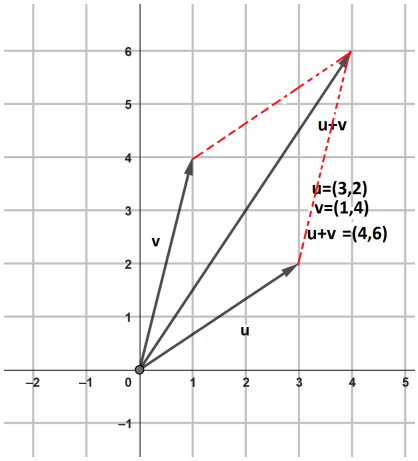
Dans $\mathbb{R}^2=\{(x,y);\ x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R}\}$, on définit les opérations suivantes :

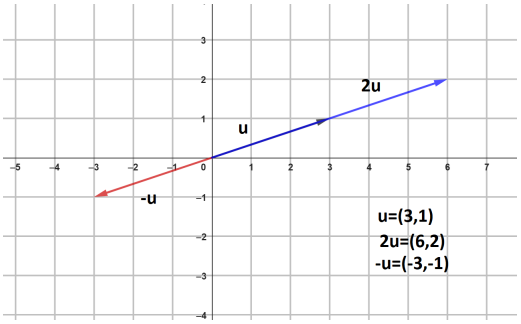
- Addition interne : $\forall\, u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\, v=(x',y')\in\mathbb{R}^2,\ u+v=(x+x',y+y')$
- Multiplication externe : $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ et $\forall\, u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha.u=(\alpha x,\alpha y)$

On remarque, qu'ainsi définis, $u+v\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha.u\in\mathbb{R}^2$. Muni de ces deux opérations, on montre que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons que $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$.

Plus généralement, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n),\forall\, i\in[\![1,n]\!],\ x_i\in\mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Graphiquement, les propriétés pour vérifier que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel se « voient ». Voilà quelques dessins :





Exemple 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^I = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$, on définit les opérations suivantes :

- Addition interne : $\forall (f,g) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^2$ et $\forall x \in I$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Multiplication externe : $\forall (\alpha, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^I$, $(\alpha.f)(x) = \alpha \times f(x)$

On montre que, muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^I$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.



- Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^I}$ est **la fonction nulle** c'est-à-dire : $\forall x \in I, 0_{\mathbb{R}^I}(x) = 0_{\mathbb{R}}$.
- Il ne faut pas confondre $f+g$ qui est une fonction (donc, ici, un vecteur) et $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ qui est un réel. En fait, $h = f+g$ signifie que : $h : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array} \right.$

Exemple 3

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, on définit les opérations suivantes :

- Addition interne : $\forall ((u_n),(v_n)) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$, $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$
- Multiplication externe : $\forall (\alpha, (u_n)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\alpha.(u_n) = (\alpha u_n)$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.



- Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est la suite nulle c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(n) = 0_{\mathbb{R}}$.
- $(u_n)+(v_n) = (w_n)$ où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.
- Là aussi, ne confondez plus la suite (u_n) notée entre parenthèses et u_n sans parenthèse qui est le n-ième terme de cette suite.

Exemple 4

Dans $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, on définit les opérations suivantes :

- Addition interne : $\forall P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$,

$$P + Q = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) X^k$$

- Multiplication externe : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha.P = \sum_{k\geq 0} \alpha a_k X^k$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.



- Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}[X]}$ est le polynôme nul c'est-à-dire celui dont tous les coefficients sont nuls.

- On rappelle aussi que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients. Ainsi, un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

2 Les sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Comme on l'a vu précédemment, montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est assez long. Si on se reporte à la définition du départ, il y a plus de 10 points à vérifier.

Dans (presque) tous les cas, vous étudierez des sous-ensembles inclus dans un des espaces vectoriels de référence cités précédemment. On se posera alors la question, si cet ensemble (plus petit au sens de l'inclusion) a lui aussi la structure d'espace vectoriel, muni des mêmes opérations.

Par la suite, le $\cdot$ indiquant la multiplication externe ne sera plus noté. Vous en avez déjà pris l'habitude : $2 \times x = 2.x = 2x$ dans $\mathbb{R}$ par exemple.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni des deux opérations $+$ et $\cdot$ et $F \subset E$ non vide.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F, muni de $+$ et de $\cdot$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple

$\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

Cette définition interpelle car l'on se demande en quoi elle va nous simplifier la vie. 

Mais, ouf ! On a le théorème suivant qui, lui, va être très intéressant à utiliser.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} 1) & F \subset E \\ 2) & F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ 3) & \forall (u,v) \in F^2, u+v \in F \\ 4) & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \alpha u \in F \end{cases}$$

👋 Plus que 4 points à faire ! Et encore, on peut fusionner les deux derniers points :

ℹ️ Les points 3) et 4) peuvent être remplacés par

$$\forall (u,v) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha u + v \in F$$

ou bien par

$$\forall (u,v) \in F^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \ \alpha u + \beta v \in F$$

Finalement, il n'y a plus que 3 points à faire. C'est à vous de décider.

Exemples

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n). $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercices Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$- espaces vectoriels ?

1. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x - 2y = 0\}$

   Oui et cela vient du fait que c'est une droite vectorielle (droite passant par l'origine) de $\mathbb{R}^2$.

   Preuve :

   - De par sa définition, $F \subset \mathbb{R}^2$. De plus, $0_{\mathbb{R}^2} \in F$ car $0 - 2 \times 0 = 0$.
   - Soient $(u = (x,y), v = (x',y')) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y')$. De plus,

     $$(\alpha x + x') - 2(\alpha y + y') = \alpha(x - 2y) + (x' - 2y') = \alpha \times 0 + 0 = 0 \text{ car } u \in F \text{ et } v \in F$$

     On en déduit que $\alpha u + v \in F$.
   - En conclusion, nous avons montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. F est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

     À vous de vous convaincre, que l'on peut prendre n'importe quelle équation de droite de la forme $ax + by = 0$...

2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x - 2y = 6\}$

   Non.

   Preuve : cela vient du fait que $0_{\mathbb{R}^2} \notin F$!

3. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x = y^2\}$

   Non.

Preuve :

On donne un contre-exemple. Considérons $u = (1, -1)$ et $v = (1, 1)$. $u \in F$ car $1 = (-1)^2$ et $v \in F$ car $1 = 1^2$. Or $u + v = (2, 0) \notin F$ car $2 \neq 0^2$. L'addition n'est pas stable dans F. F n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition

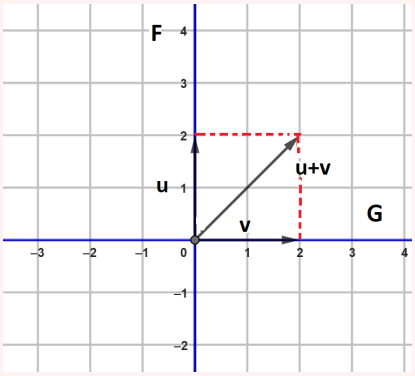
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.



En revanche, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel en général !!!

Dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, on considère les droites F et G respectivement d'équation $x = 0$ et $y = 0$ (axe des ordonnées et axes des abscisses).

$u = (0, 2) \in F$ donc $u \in F \cup G$, $v = (2, 0) \in G$ donc $v \in F \cup G$. En revanche, $u + v = (2, 2)$ n'est ni dans F, ni dans G. Donc $u + v \notin F \cup G$.





C'est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

2.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit le sous-ensemble $F + G$ de E par

$$F + G = \{u \in E, \exists\, (u_1, u_2) \in F \times G, u = u_1 + u_2\} = \{u_1 + u_2,\ u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G\}$$



- $0_E \in F + G$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et F et G sont sous-espaces vectoriels de E.
- $u \in F + G \iff \exists\, (u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$ mais on peut se contenter d'écrire $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.
- $F \subset F + G$ car $\forall\, u \in F$, $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. De même, $G \subset F + G$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

C'est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemple 1

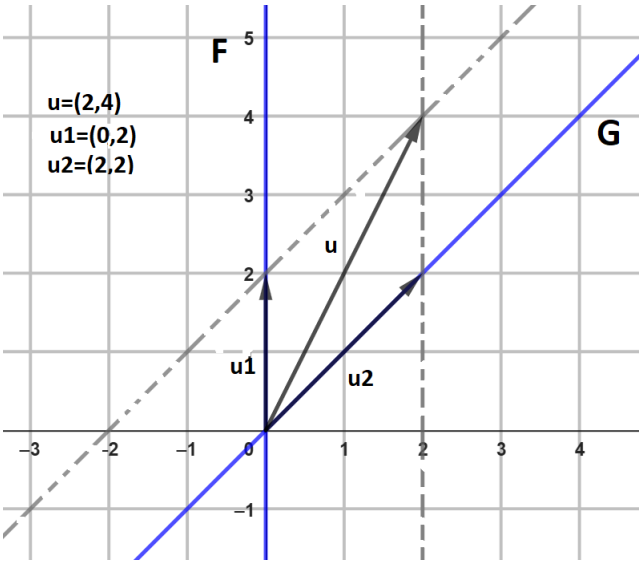
Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les deux sous-espaces vectoriels (droites vectorielles) :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\right\}$$

Le vecteur $u = (28,-6) \in F+G$ car $u = \underbrace{(0,-34)}_{=u_1 \in F} + \underbrace{(28,28)}_{=u_2 \in G}$

On peut alors se poser la question suivante : est-il possible de décomposer dans ce cas-là n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^2$?

La réponse est « oui » comme le montre le dessin suivant. On crée en fait un nouveau repère de $\mathbb{R}^2$. On obtient u_1 et u_2 en projetant u sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F.



Du dessin, on généralise : $\forall\, u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u = \underbrace{(0,y-x)}_{=u_1 \in F} + \underbrace{(x,x)}_{=u_2 \in G}$. Cela montre que $\mathbb{R}^2 \subset F+G$.

Or, par définition, $F+G \subset \mathbb{R}^2$.

On a dans ce cas, $\mathbb{R}^2 = F+G$

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas là, $F+G$ se note $F \oplus G$.

Exemples

- C'est le cas dans l'exemple 1 précédent. On voit clairement en faisant le dessin que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les deux sous-espaces vectoriels (plans vectoriels)

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\Big\} \text{ et } G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\Big\}$$

  F et G ne sont pas en somme directe car $u = (-2,0,0) \in F \cap G$.

Question Quelle est alors l'intérêt de cette nouvelle définition ? 🤔

En voici la réponse :

Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$F \cap G = \{0_E\} \iff \forall\, u \in F+G,\ \exists !\,(u_1,u_2) \in F \times G,\ u = u_1 + u_2$$

Autrement dit, F et G sont en somme directe si et seulement si il y a **unicité de la décomposition** dans $F+G$.



Le sens direct est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemples

- C'est clairement le cas pour l'exemple 1 précédent (essayez de trouver une autre décomposition de $u = (28,-6)$...)
- Dans $\mathbb{R}^3$, reprenons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\}$

  La décomposition de $u = (1,2,3)$ dans $F+G$ n'est pas unique.

$$u = \underbrace{(1,2,0)}_{u_1 \in F} + \underbrace{(0,0,3)}_{u_2 \in G} \text{ ou } u = \underbrace{(183,2,0)}_{v_1 \in F} + \underbrace{(-182,0,3)}_{v_2 \in G} \text{ ou...}$$

  par exemple. Cela vient du fait que F et G ne sont pas en somme directe.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ F+G &= E \end{cases}$

Dans ce cas là, on note $E = F \oplus G$.

Exemple 1 F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$E = F \oplus G \iff \forall\, u \in E,\ \exists !\, (u_1, u_2) \in F \times G,\ u = u_1 + u_2$$

D'un point de vue rédaction, pour démontrer « $E = F \oplus G$ », il y a deux égalités d'ensembles à montrer : « $E = F + G$ » et « $F \cap G = \{0_E\}$ ». Cela revient donc à montrer 4 inclusions. 2 d'entre elles sont immédiates (mais il ne faut pas oublier de l'écrire !) : $F + G \subset E$ de par la définition de $F + G$ et $\{0_E\} \subset F \cap G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemple détaillé

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires.

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0\right\}$$

• Intersection.

- Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. On a ainsi, $u \in F$ et $u \in G$. D'où, $x + y = 0$ et $y = z = 0$. Cela donne $x = y = z = 0$. Donc, $u = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a prouvé : $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $0_{\mathbb{R}^3}$ est dans F et G. Donc $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset F \cap G$.

On a donc bien : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

• Somme.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Il est facile de voir (indice : commencer par mettre les deux 0 sur le deuxième vecteur que vous cherchez car il doit appartenir à G) que

$$u = \underbrace{(-y, y, z)}_{=u_1} + \underbrace{(x + y, 0, 0)}_{=u_2}$$

  Or, $u_1 \in F$ car $-y+y = 0$ et $u_2 \in G$. Ainsi, $u = u_1 + u_2 \in F + G$. On a montré que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$.
- De plus, on sait que $F + G \subset \mathbb{R}^3$.

On a donc bien $\mathbb{R}^3 = F + G$.

En conclusion, $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

À votre avis ?

Dans $\mathbb{R}^3$, toute droite et plan vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.

1. Deux droites vectorielles (non confondues) peuvent-elles être supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Deux plans vectoriels (non confondus) peuvent-ils être supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Une droite vectorielle et un plan vectoriel peuvent-ils être supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Aidez-vous de dessins pour répondre à ces 3 questions...

3 Les démonstrations à connaitre

3.1 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- Comme $F \subset E$ et $G \subset E$, on a $F \cap G \subset E$.
- De plus, F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Ainsi, $0_E \in F \cap G$.
- Soient $(u, v) \in (F \cap G)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $(u, v) \in F^2$ et $(u, v) \in G^2$. Or

$$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \implies \alpha\, u + v \in F.$$
$$G \text{ sous-espace vectoriel de } E \implies \alpha\, u + v \in G.$$

Ainsi, $\alpha\, u + v \in F \cap G$.

3.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

On rappelle que $F + G = \{u \in E, \exists\, (u_1, u_2) \in F \times G, u = u_1 + u_2\}$.

Ainsi, un vecteur u de E est dans $F + G$ si on peut l'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : $u = \underbrace{u_1}_{\in F} + \underbrace{u_2}_{\in G}$.

Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- De par sa définition, $F + G \subset E$.
- De plus, $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ car F et G sev de E. D'où, $0_E \in F + G$.
- Soient $(u, v) \in (F + G)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $\exists\, (u_1, u_2) \in F \times G$ et $\exists\, (v_1, v_2) \in F \times G$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$. Ainsi,

$$\alpha\, u + v = \alpha\, (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(\alpha\, u_1 + v_1)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha\, u_2 + v_2)}_{\in G}$$

  car F et G sev de E. Donc $\alpha\, u + v \in F + G$.

Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$F \cap G = \{0_E\} \implies \forall\, u \in F + G,\ \exists !\, (u_1, u_2) \in F \times G,\ u = u_1 + u_2$$

Autrement dit, si F et G sont en somme directe alors il y a **unicité de la décomposition** dans $F + G$.

Preuve :

Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $u \in F + G$. Supposons deux décompositions possibles pour u :

$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } (u_1, u_2) \in F \times G \text{ et } u = v_1 + v_2 \text{ avec } (v_1, v_2) \in F \times G$$

Alors, $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ d'où $u_1 - v_1 = v_2 - u_2$.

Comme $(u_1, v_1) \in F^2$ et F sev de E, $u_1 - v_1 \in F$. De même, $v_2 - u_2 \in G$ car $u_2 \in G$, $v_2 \in G$ et G sev de E. Ainsi, $u_1 - v_1$ est un vecteur aussi de G car il est égal à $v_2 - u_2 \in G$. Donc, $u_1 - v_1 \in F \cap G$. Comme F et G sont en somme directe, on en déduit que $u_1 - v_1 = 0_E$ c'est-à-dire $u_1 = v_1$. De là, on en déduit que $u_2 = v_2$. L'écriture est bien unique.

Bonus : preuve de la réciproque !

Supposons l'unicité de la décomposition dans $F + G$.

- Comme F et G sont deux sev de E, on a $\{0_E\} \subset F \cap G$.
- Soit $u \in F \cap G$. On a donc $u \in F$ et $u \in G$.

  Par hypothèse, le vecteur nul 0_E n'a qu'une seule décomposition dans $F+G$. Or on peut écrire :

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \text{ mais aussi } 0_E = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{-u}_{\in G}$$

  On en déduit donc, par unicité que $u = 0_E$ et $-u = 0_E$. Ainsi, on a montré que $F \cap G \subset \{0_E\}$.

  On conclut que $F \cap G = \{0_E\}$.